

חלק 1: תיאור מציג - מציג (א, ב, ג, ד, ...)

שאלה 4 תיאוריה (8 נקודות)

חלק 1. אמידה מוטה.

נניח שזמנים בין-מופעים של אוטובוסים לתחנה הם בלתי-תלויים, שווי-התפלגות, ומתוארים על ידי משתנה מקרי (מ"מ) S . נניח שלמ"מ S יש תוחלת סופית $E(S)$ ושונות סופית $\sigma^2(S)$. בכתה הראינו שעבור נוסע המופיע באקראי לתחנה, הזמן S_e מרגע מופע הנוסע עד רגע מופע האוטובוס הבא הוא בעל תוחלת:

$$E(S_e) = \frac{1}{2} E(S) \cdot [1 + C^2(S)]$$

כאשר $C(S)$ הוא מקדם ההשתנות של המ"מ S . (בהקשרים של שירות, S_e נקרא גם "זמן שארית השירות").

4.1 הסבירו בקיצור את התופעה המתוארת על ידי הנוסחה ל- $E(S_e)$ (אותה כינינו "אמידה מוטה"), תוך שימוש במקרה פרטי (התפלגות מיוחדת) הממחיש אותה.

תשובה:

התופעה: דגימה של אינטרוול זמן ע"י בחירה של נקודת זמן בו, גורמת להטיה לטובת אינטרוולי זמן ארוכים. לדוגמא: כאשר האינטרוולים הם זמנים בין מופעים של אוטובוסים, המתפלגים מעריכית (exp), נניח עם ממוצע $\frac{1}{\mu}$, ממוצע S_e גם הוא $\frac{1}{\mu}$ (מיידית, על סמך חוסר זיכרון); שיקול נאיבי היה צופה כי הממוצע של S_e הוא רק $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mu}$.

חלק 2. $M, |G| \infty$

במערכת שירות $M, |G| \infty$, המופע הוא פואסוני לא הומוגני בזמן עם קצב מופע $\{\lambda(t), t \geq 0\}$, ומשכי השירות S הם בלתי-תלויים, שווי התפלגות, ובלתי תלויים במופע. נסמן ב- $L(t)$ את מספר האנשים במערכת בזמן t ויהי $R(t)$ ממוצע מספרם: $R(t) = EL(t)$.

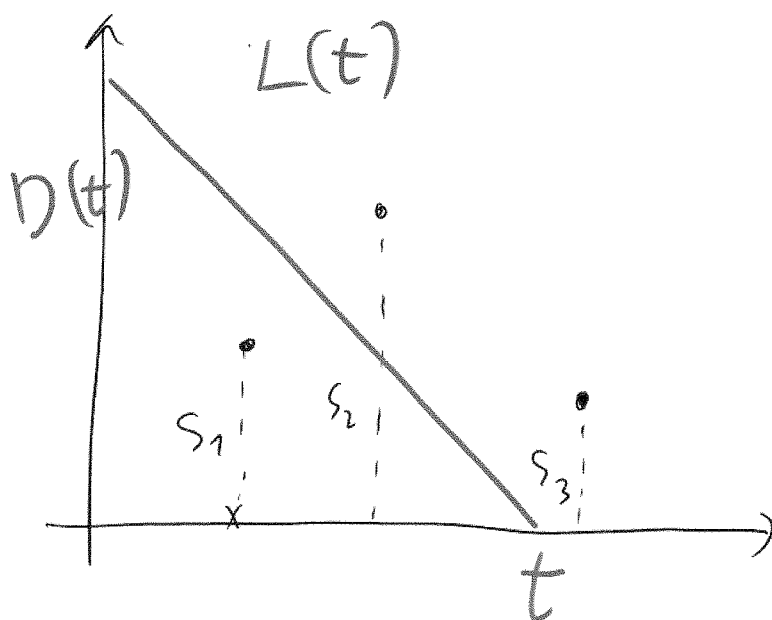
ניתן להראות ש- $R(t)$ נתון על ידי כל אחד משני הביטויים הבאים:

$$R(t) = E\left(\int_{t-S}^t \lambda(u) du\right) = E(S) \cdot E(\lambda(t - S_e)) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(u) P(S > t-u) du$$

מטרת שני הסעיפים 4.2.1-4.2.2 להוכיח את הנוסחאות הנ"ל במקרה פרטי של משך שירות דטרמיניסטי.

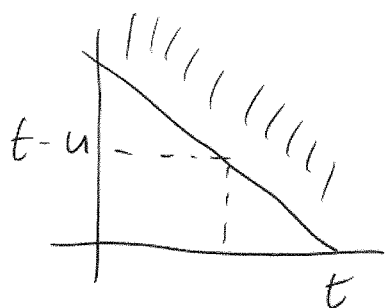
(הקצו 3/4 נקודות)
(4.5 פופולר)

Poisson Point Process : $\lambda(t) dt G(dx)$
 Representation of $M_t / G/\infty$



PPP with measure : $\lambda(t) dt G(dx)$

$$R(t) = E L(t) = \int_0^t du \lambda(u) \int_{t-u}^{\infty} G(dx) \quad \left(\int_{\lambda(t) dt} G(dx) \right)$$



$$= \int_{-\infty}^t \lambda(u) P(S > t-u) du$$

Note: $D(t)$ and $L(t)$ independent $\forall t$

- D is Poisson(!) with $\lambda_D(t) = \int_0^t \lambda(u) G(t-u) du$
 (since has independent increments) ^{∞}

$$M_t / D / \infty \quad \text{ק' במ/חז' פ'ל/חז'}$$

4.2.1 נניח שמשך השירות S הוא דטרמיניסטי $S=D$. הוכיחו את השוויון בין שתי ההצגות של $R(t)$ למקרה זה, ז"א:

$$\int_{t-D}^t \lambda(u) du = D \cdot E(\lambda(t - S_e))$$

כאשר S_e הוא זמן שארית השירות המתאים ל- S דטרמיניסטי D .

תשובה:

$S_e \stackrel{d}{=} U(0, D)$ מתפלג אחיד על $[0, D]$.

$$RHS = D \cdot E(\lambda(t - S_e)) = D \cdot \int_0^D \frac{1}{D} \cdot \lambda(t - x) dx = \int_0^D \lambda(t - x) dx \stackrel{u=t-x}{=} \int_{t-D}^t \lambda(u) du = LHS$$

4.2.2 הוכיחו שמתקיים:

$$R(t) = \int_{t-D}^t \lambda(u) du$$

$$\int_{t-D}^t \lambda(u) du = \int_0^t \lambda(u) du - \int_0^{t-D} \lambda(u) du \quad \text{רמז:}$$

כ'

תשובה:

נסמן $A(t)$ = מספר המופעים המצטבר עד זמן t . אזי $L(t) = A(t) - A(t-D)$, כי בזמן t נמצאים במערכת כל המופעים באינטרוול הזמן $(t-D, t]$.

בנוסף, $A(t) \stackrel{d}{=} \text{Poisson} \left(\int_0^t \lambda(u) du \right)$, ולכן

$$R(t) = E(L(t)) = \int_0^t \lambda(u) du - \int_0^{t-D} \lambda(u) du = \int_{t-D}^t \lambda(u) du.$$

חלק 3. עומס מוצע.

בכתה הוסבר ש- $R(t)$ הנ"ל משמש כהגדרת העומס המוצע (Offered Load) למערכת שירות בזמן t , כאשר המופע אליה ומשכי השירות בה הם כמתואר בחלק 2 הנ"ל. (כזכור, $R(t)$ נמדד ב-Erlang).

4.3 הסבירו בקצרה מדוע אכן ההגדרה מתאימה. את הסברכם חלקו לשלושה חלקים:

4.3.1 המקרה הפרטי של מופע פואסוני בקצב קבוע $(\lambda(t) \equiv \lambda)$: מהו $R(t)$ במקרה זה ומדוע הגדרתו מתאימה?

תשובה:

במקרה זה $R(t) = \lambda \cdot E(S) \equiv R$, אינו תלוי ב- t !
 λ = מספר ממוצע של מופעים ליחידת זמן. כל מופע מביא עימו בממוצע $E(S)$ יחידות עבודה, הנמדדת ביחידות זמן-שירות. לכן R = כמות העבודה המגיעה למערכת ליחידת זמן, כאשר עבודה נמדדת ביחידות זמן שירות.

4.3.2 דוגמא של חדר מיון בבית חולים, שבו משך השהיה הממוצע 6 שעות: מדוע ההגדרה מסעיף 4.3.1 איננה מתאימה למקרה שכזה?

תשובה:

כאשר S מקבל ערכים יחסית גדולים, כמות העבודה בזמן t במערכת כוללת עבודה שהגיעה זמן רב יחסית לפני t , ואם קצב המופע משתנה, כמו בחדר מיון, קצב מופע העבודה לפני זמן רב יכול להיות שונה בהרבה מקצב המופע בזמן t .

4.3.3 המקרה הכללי: מדוע הגדרת $R(t)$ בחלק 2 הנ"ל אכן מתאימה?

תשובה:

בהמשך ל-4.3.2, $R(t)$ = כמות העבודה הנמצאת במערכת בזמן t ; עבודה נמדדת ביחידות זמן שירות, או לחילופין מספר יחידות זמן-שירות הנדרשות לטיפול. לכן $R(t) = E(L(t))$.
 הביטוי $E\left(\int_{t-S}^t \lambda(u) du\right) = R(t)$ ממחיש יפה את העובדה שכמות העבודה בזמן t כוללת עבודה שהגיעה לפני כן, בקצב תלוי זמן $\lambda(t)$.

כאה Litvak (2012) 22

4.4 הסבירו כיצד ניתן להרחיב את המקרה הדטרמיניסטי ב- 4.2.1 הנ"ל למקרה של S כללי, דהיינו כיצד מוכיחים שאכן:

$$E\left(\int_{t-S}^t \lambda(u) du\right) = E(S) \cdot E(\lambda(t - S_e))$$

רמז: ניתן לקרב כל משתנה מקרי, בדיוק רב כרצונכם, על ידי משתנה מקרי המקבל מספר סופי של ערכים (מ"מ דיסקרטי).

תשובה:

נניח p_i w.p. $S = D_i$, מ"מ דיסקרטי.

על סמך עמידה מוטו, $\frac{p_i D_i}{E(S)}$ w.p. $S_e = U_i$, כאשר $U_i \stackrel{d}{=} U(0, D_i)$.
לכן,

$$\begin{aligned} LHS &= \sum_i p_i \int_{t-D_i}^t \lambda(u) du \stackrel{\lambda_i = \lambda \cdot p_i}{=} \sum_i \int_{t-D_i}^t \lambda_i(u) du \stackrel{4.2.1}{=} \sum_i D_i E(\lambda_i(t - U_i)) = \\ &= E(S) \sum_i \frac{p_i D_i}{E(S)} E(\lambda(t - U_i)) = E(S) E(\lambda(t - S_e)) = RHS \end{aligned}$$

4.5 ניתן להראות (על ידי שינוי משתני אינטגרציה בלבד) שמתקיים:

$$E\left(\int_{t-S}^t \lambda(u) du\right) = \int_{-\infty}^t \lambda(u) [1 - G(t - u)] du$$

כאשר $G(\cdot)$ היא פונקציית ההתפלגות של משך השירות S. שימו לב ליחס:

$$1 - G(t - u) = P\{S > t - u\}$$

היעזרו בעובדות אלו כדי לחזק את הסברכם בסעיף 4.3.3, ז"א תנו הסבר מדויק יותר לעובדה ש- $R(t)$ הוא אכן ההגדרה המתאימה לעומס המוצע (Offered Load) בזמן t.

תשובה:

1. $\lambda(u)$ = קצב המופע בזמן u. לכן $\lambda(u) du \approx$ ממוצע מספר המופעים במשך $(u, u + du)$.
2. $1 - G(t - u)$ = % המופעים בזמן u שעדיין נמצאים במערכת בזמן $t > u$.
3. $[\lambda(u) du] \cdot [1 - G(t - u)] \approx$ כמות העבודה במערכת בזמן t, שמקורה במופעים שהתרחשו במשך $(u, u + du)$.
4. $\int_{-\infty}^t \lambda(u) [1 - G(t - u)] du$ = כמות העבודה במערכת בזמן t, $t > 0$.

Root Cause Analysis of Emergency Department Crowding and Ambulance Diversion in Massachusetts

A report submitted by the Boston University
Program for the Management of Variability in Health Care Delivery
under a grant from the
Massachusetts Department of Public Health

October, 2002

Emergency Room Diversion Study: Analysis and Findings

Phase I

Phase I of these investigations involved formulation of a conceptual model that would permit data collection and analysis germane to the problem of ambulance diversion. As preparation for this study, a wide range of relevant medical publications, policy statements and commissioned studies were reviewed. This was followed by personal interviews with representatives in government, hospital administration, public health and the Emergency Medicine community. Information was gathered from throughout Massachusetts and from other key states. Particular attention was given to experience in areas where crowding is particularly severe including metropolitan Boston, San Francisco, Los Angeles and the states of Arizona and Florida. Overall, numerous potential root causes of diversion had been articulated both in the medical literature and lay press, but empirical data to support them were lacking. Available research tended to be descriptive, documenting the extent of crowding without clear delineation of its sources. Various solutions had been proposed and implemented, all without consistent benefit. A partial summary of this analysis has been previously released by the Massachusetts Health Policy Forum of Brandeis University.

An operations management perspective suggested straightforward input-throughput-output analysis. Hospital utilization data provided by the Division of Health Care Finance and Policy was therefore reviewed alongside diversion data provided by regional EMS providers. Analysis of this information revealed the likely operation of mechanisms both internal and external to emergency departments. In addition to simple supply/demand imbalances for emergency care, diversion and utilization patterns suggested bottlenecks and backlogs related to the competition of emergency and non-emergency patients for similar resources. The interrelationships of hospital services then became the focus of attention and patient care pathways were explored with administrators from the two study hospitals.

Two paradigms for the quantitative study of interrelationships among hospital departments were considered. The first involved an analytical approach wherein each relationship was identified, its stochastic character estimated, and appropriate

Hospital A:

Diversion Pattern "Hospital A - Diversion Minutes by Hour"

- There were a total of 22 episodes of diversion which started and ended within the study, with an average length of 814 minutes. There was one episode that began prior to the study and ended after the study began and so is not included in this calculation, nor in any calculations which involve the beginning of diversion episodes.
- The hourly diversion pattern shows diversion is highest in the evening hours, settles back down during the early morning hours, and then stays steady until the mid to late afternoon (see Fig. 1).
- The goal of the project was to determine the drivers which create this pattern.

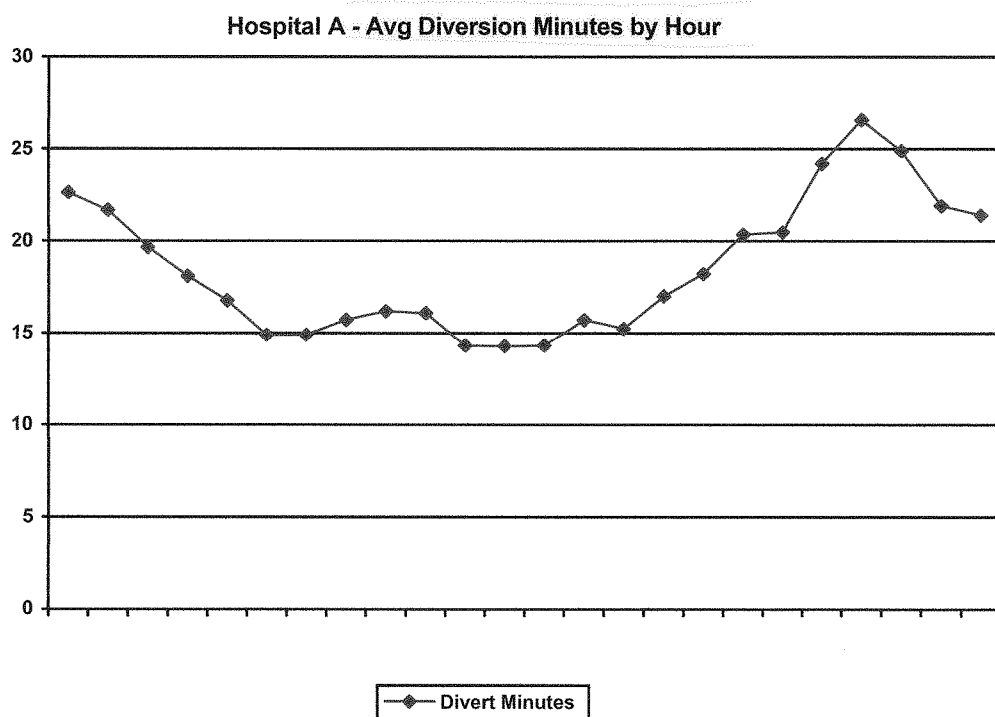


Fig. 1

The following 3 hypotheses were tested to determine the drivers of diversions:

1. ED arrival rate is too high, leading to diversion when the ED becomes full.
2. ED processing of patients is too slow, causing backups that lead to diversion
3. ED arrival and processing rates are fine, but there are not enough beds in the hospital to accommodate the admissions.

There are seven sets of data (see Fig. 2), each representing a different view of arrivals into the ED. The "Arrivals_0" category only includes new arrivals from the hour in question. Each subsequent category, from "Arrivals_1" to "Arrivals_6" includes one more hour's worth added to the total. In other words, "Arrivals_1" includes arrivals from the current hour added to the arrivals from the previous hour, "Arrivals_2" includes all of "Arrivals_1" plus the arrivals from two hours ago, and so on. This is what accounts for the stacked shape as each additional hour is layered on top. Because average length of stay was 340 minutes, 6 hours is used as the maximum lag. Correlation coefficients from each of these cumulatives to Avg Diversion Minutes by hour are as follows:

Arrivals_0 = -0.073
 Arrivals_1 = 0.001
 Arrivals_2 = 0.078
 Arrivals_3 = 0.165
 Arrivals_4 = 0.259
 Arrivals_5 = 0.359
 Arrivals_6 = 0.460

$$R(t) \approx \lambda(t) + \lambda(t-1) + \lambda(t-2) + \dots + \lambda(t-6)$$

$$\approx \int_{t-ES}^t \lambda(u) du$$

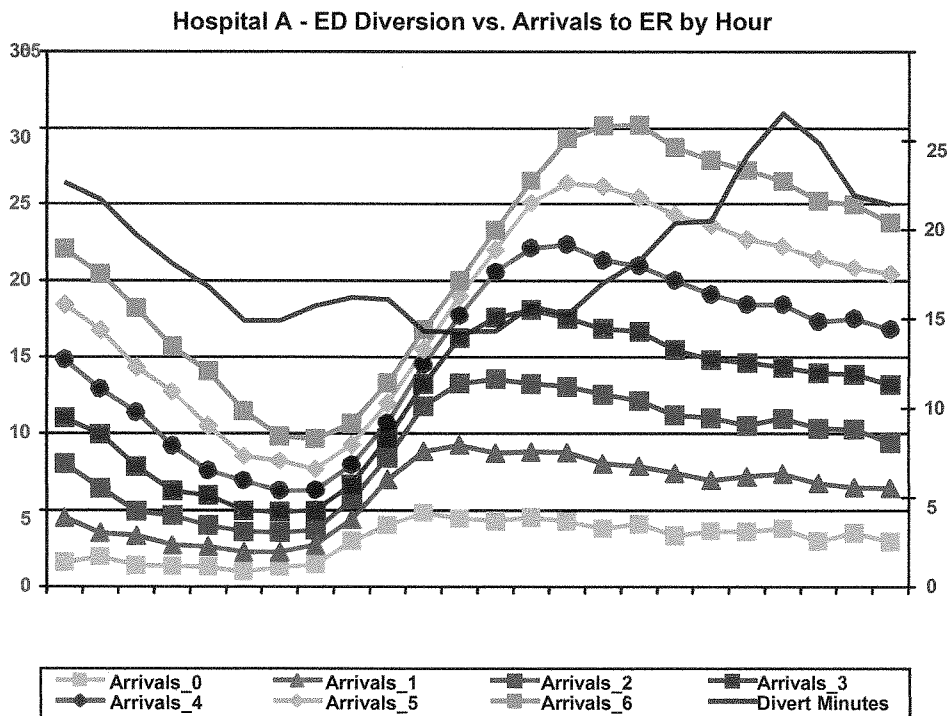


Fig. 2

There is also a possible corollary to hypothesis #1, that overall ED census is a driver of diversion. When counting the non-boarding census and comparing it to diversion status, however, the resulting point-biserial coefficient ($r = -0.051$) makes clear that this potential explanation should be rejected as well.